Государственное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования
Московский государственный строительный университет
Ассоциация московских вузов

Утверждаю
Проректор по УМР и МД

_____________Гагин В.И.
«___»__________2009 г.

ОТЧЕТ
о выполнении подраздела мероприятий по социальному обслуживанию населения в части предоставления образовательных услуг жителям города Москвы

Подраздел №11.5.2.5. «Научно-методологические проблемы применения новых методов проектирования для решения комплексных задач современного строительства»
(Научно-информационный материал)

Научный руководитель подраздела	Доцент каф. ИПМ МГСУ	(499) 183-59-94		Кайтуков Т.Б.
Ответственный исполнитель	Зав. лаб. ЛРК			Енговатов И.А.
	Должность	Телефон	Подпись Дата	ФИО

Москва, 2009 г.

Под научным руководством и при непосредственном участии доцента каф. ИПМ Кайтукова Т.Б. (отв. исполнитель зав. лаб. ЛРК Енговатов И.А.) в рамках подраздела 11.5.2.5. были разработаны и вручены для практического использования заинтересованным специалистам строительного комплекса Москвы научно-информационные материалы в области разработки и развития новых методов проектирования для решения комплексных задач современного строительства и изучения научно-методологических проблем применения этих методов на примере метода дискретных граничных уравнений для расчета конструкций.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.

В связи с постоянным развитием и практической значимостью строительства, большим объемом строительных работ и появлением новых материалов совершенствование методов расчета конструкций остается актуальной задачей. Методика расчета конструкций в основном распадается на два этапа: создание расчетной модели и численное или аналитическое решение задачи в рамках заданной расчетной модели. Вторая часть является как бы инструментом в процессе общей задачи расчета конструкций, поскольку основой в ней является построение или использование эффективных математических методов. Каждый из существующих методов имеет свои достоинства и недостатки, но самое главное свои объекты эффективного применения. В настоящем научно-информационном материале разрабатывается метод, тесно связанный с методом граничных интегральных уравнений для решения краевых задач расчета сооружений. Это метод дискретных граничных уравнений. Так же как и метод граничных интегральных уравнений, он имеет полуаналитический характер, т.е. представляет решение в виде конечных формул, которым предшествует численное вычисление некоторых параметров или функций. Отличие дискретного подхода состоит в том, что исходная задача уже дискретная, т.е. задана не сетке, имеющей постоянные характеристики. Это позволяет в аналитической форме исключить неизвестные во внутренних точках конструкции и перейти к разрешающим уравнениям относительно неизвестных в граничных точках. Преимущество предлагаемого подхода заключается в том, что в отличие от метода граничных интегральных уравнений здесь отсутствуют проблемы, связанные с сингулярными интегралами и другими неинтегрируемыми в обычном смысле функциями. У предлагаемого подхода, хотя он и достаточно универсален, есть эффективная область применения, это конструкции, состоящие из подконструкций прямоугольной формы, достаточно часто представленные в реальных сооружениях, в частности, в стыковых конструкциях зданий.

Еще одним фактором, оказывающим сильное влияние на развитие численных методов, является непрерывный рост производительности вычислительной техники наряду с широкими сервисными возможностями. Применение средств автоматизации уменьшает затраты труда проектировщиков, способствует повышению эффективности и надежности проектируемых конструкций. Кроме того, резкое увеличение количества быстродействующих персональных ЭВМ позволяет производить вычисления с большей скоростью для задач с большим количеством неизвестных, создавать программные комплексы, открывающие широкие возможности при практической реализации в области математического моделирования.

Различают прямые и непрямые формулировки граничных уравнений. Их основное отличие состоит в том, что при непрямых формулировках наряду с рассматриваемой внутренней областью, учитывают и область, дополняющую первоначальную внутреннюю область до полного пространства.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ В ФОРМУЛИРОВКАХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

При описании краевой задачи необходимо наличие трех компонент: описания исходной области Ω, условий внутри области в виде дифференциальных уравнений и краевых условий. Эти три части являются достаточно независимыми друг от друга, что весьма неудобно при расчете с помощью приближенных методов. Основная причина здесь кроется в необходимости вычисления и оценке невязки для произвольных функций, не удовлетворяющих ни уравнениям, ни граничным условиям. Выход состоит в использовании обобщенных операторных формулировок граничных задач. Другой способ состоит в записи в виде функционала энергии.

Характеристическая функция области.

В общем случае характеристическая функция задается как

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & P(x)>0\\ 0, & P(x)\le 0\end{cases} \tag{1.1}$$

где

$P(x)=0$ – уравнение границы исходной области.

В некоторых случаях запись характеристической функции возможна через функцию Хевисайда $\chi(x)$ (рис. 1.1):

$$\theta(x)=\chi(P(x)), \tag{1.2}$$

где

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases} \tag{1.3}$$

Если исходная область является выпуклой (случай многоугольника или многогранника), ее характеристическая функция описывается неравенством (1.4):

$$\theta(x)=\begin{cases}1, & P_i(x)>0,\ \textit{для всех } i=1,\dots,M\\ 0, & \textit{в противном случае}\end{cases} \tag{1.4}$$

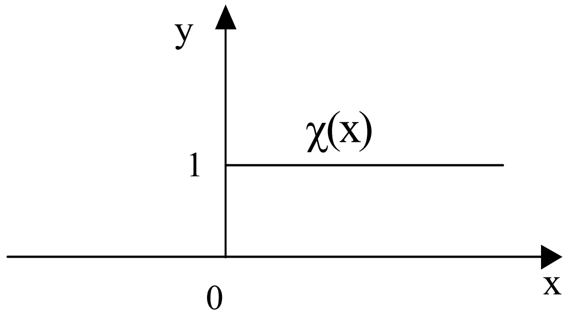

Рис. 1.1. Вид функции Хевисайда.

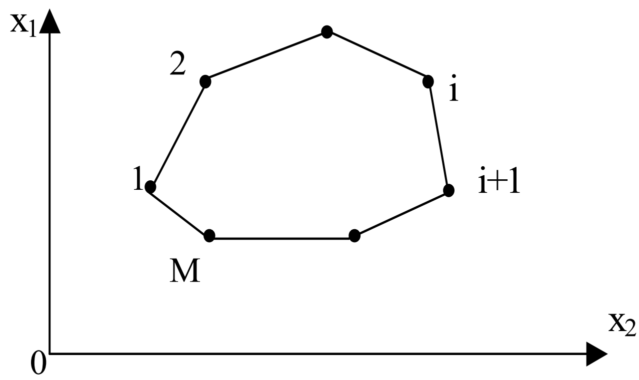

Рис. 1.2. Пример выпуклой области в виде многогранника.

Любая исходная область может быть представлена как сумма или разность выпуклых областей. Характеристическая функция $\theta(x)$ при этом рассчитывается как:

$$\theta(x) = \sum_{k=1}^{N} \pm\, \theta_k(x) \tag{1.5}$$

При описании граничных условий и их весовых характеристик большую роль играют производные от характеристической функции области. Так как на краях области данная область в обычном смысле не дифференцируема, а внутри и за пределами области она является константой, то ее производные в свою очередь являются обобщенными функциями, сосредоточенными на границе.

Обобщенные функции представляются в виде интегральных соотношений:

$$\left(f,\varphi\right)=\int f\varphi\,dx\ , \tag{1.6}$$

где

f - определяемая обобщенная функция;

φ - произвольная бесконечно дифференцируемая финитная функция, т.е. вне некоторого отрезка равная 0.

Среди обобщенных функций, сосредоточенных на границе, выделяют дельта-функцию границы $\delta_\Gamma=\delta(p)$, которая определяется как:

$$\int\limits_{R_N}\delta_\Gamma\varphi\,dx=\int\limits_\Gamma\varphi\,d\Gamma\ , \tag{1.7}$$

где

$\Gamma=\partial\Omega$ - граница исходной области Ω, описываемая уравнением $p(x)=0$.

Если имеется нормированная функция $p(x)$, где в точках $x:p(x)=0$ производная по нормали $\nu=\left(\nu_1,\nu_2,\ \dots\ ,\nu_N\right)$ к границе равна 1, тогда

$$\frac{\partial p}{\partial x_i}=\nu_i=\cos\left(x_i\ ,\nu\right), \tag{1.8}$$

где

$\nu=\left(\nu_1,\nu_2,\ \dots\ ,\nu_N\right)$ - единичный вектор нормали к поверхности. Нормаль в свою очередь означает внешнюю нормаль к границе области.

Функции вида $\delta_\Gamma^{(k)}$ представляются как:

$$\delta_\Gamma^{(k)}=\delta^{(k)}(p)=\frac{\partial^k}{\partial\nu^k}\delta(p) \tag{1.9}$$

Связь вышеприведенных обобщенных функций с характеристической функцией области $\theta(x)$ возможна через следующие соотношения:

$$\delta_\Gamma=\frac{\partial\theta}{\partial\nu} \tag{1.10}$$

$$\delta_\Gamma^{(k)}=\frac{\partial^{k+1}\theta}{\partial\nu^{k+1}} \tag{1.11}$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = \frac{\partial p}{\partial x_i}\delta_\Gamma \tag{1.12}$$

или при нормированном $p(x)$:

$$\frac{\partial\theta}{\partial x_i} = v_i\delta_\Gamma \tag{1.13}$$

Аппроксимация функций и области.

Один из способов, существенно упрощающий постановку и решение краевой задачи, заключается в окаймлении исходной области Ω, которая описывает конструкцию, расширенной областью ω произвольной формы. Аппроксимация данной стандартной области предполагает задание сетки, которая является топологически эквивалентной прямоугольной, причем необходимо стремиться к тому, чтобы данная сетка можно ближе соответствовала очертаниям исходной области. Топологическая эквивалентность означает, что принятая сетка может быть получена из прямоугольной, путем некоторой невырожденной деформации ячеек последней без их «перекручивания».

Возникающие преимущества при выборе таких сеток заключается в удобстве получаемых итоговых математических формул, в возможности простой регулярной нумерации узлов сетки, а также в применении данной аппроксимации к разнообразным конструкциям.

В краевой задаче представление всех функций и характеристик осуществляется с помощью сеточных функций. Они представляют собой массивы одинаковой размерности, определяемой размерностью сетки:

$$\varphi(i_1, i_2, \ldots, i_N) = \varphi(i) = \overline{\varphi}, \quad i_k = 1, \ldots, m_k, \quad k = 1, \ldots, N \tag{1.14}$$

В пространстве сеточных функции вводятся специальные сеточные операции по каждому из индексных направлений $k = 1, \ldots, N$, причем вне исходной области или сетки, эти функции равны нулю:

сдвиг»

$$\left(C_k^{\pm}\varphi\right)(i) = \varphi(i_k \pm 1) \tag{1.15}$$

«осреднение»

$$\left(T_k^{\pm}\varphi\right)(i)=\varphi(i)+\varphi(i_k \pm 1) \tag{1.16}$$

«разность вперед»

$$\left(D_k^{+}\varphi\right)(i)=\varphi(i_k +1)-\varphi(i) \tag{1.17}$$

«разность назад»

$$\left(D_k^{-}\varphi\right)(i)=\varphi(i)-\varphi(i_k -1) \tag{1.18}$$

здесь $\varphi(i_k \pm 1)$ – увеличение или уменьшение на единицу *k*-того индекса.

Формулировка дискретных аналогов исходных операторов в сеточных терминах ведет к максимально быстрым вычислительным схемам.

При переходе от решения континуальной задачи к дискретной задаче, решение ведется на множестве сеточных функций, т.е. функций определенных в узлах выбранной сетки. Но так как исходная задача определена во всех точках области, а не только в узлах сетки, возникает необходимость в восполнении (доопределении) сеточной функции во всех остальных точках. Такое восполнение производится локально по сеточным элементам. К примеру, для задачи теории упругости применяется кусочно-линейное (полилинейное) восполнение внутри ячеек сетки. Данное полилинейное восполнение представляет собой переход от исходной функции $u(x)$ к восполненной сеточной $u(i,t)$, причем получается сетка с единичным шагом по обоим направлениям.

$$u(x)=u(x_1,\dots,x_N)\rightarrow u(i_1,\dots,i_N;t_1,\dots,t_N)=u(i,t),$$

где x - исходная система координат;

i - система координат квадратной сетки;

$t\in[0,1]$ - локальная система координат внутри сеточного элемента.

В одномерном случае восполненная сеточная функция записывается в виде:

$$\begin{gathered} u(i,t)=u_i+t\Delta u_i \qquad x\in[x_i,x_{i+1}] \\ t\in[0,`1] \qquad \Delta u_i=u_{i+1}-u_i \end{gathered} \tag{1.19}$$

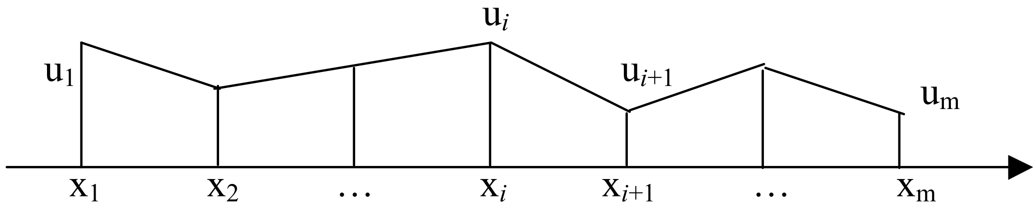

Рис. 1.3. Восполнение сеточной функции в одномерном случае.

Восполнение сеточной функции в двумерном случае осуществляется при помощи билинейной аппроксимации:

$$u(i_1,\, i_2;\, t_1, t_2) = u(i) + t_1\Delta_1 u(i) + t_2\Delta_2 u(i) + t_1 t_2 \Delta_{12} u(i)$$
$$x_k \in [x_k(i),\, x_k(i_1+1)] \quad u(i) = u_i(i_1,\, i_2) \tag{1.20}$$
$$k = 1,2 \qquad t \in [0,1]$$

$$\Delta_1 u(i_1,\, i_2) = u(i_1+1,\, i_2) - u(i_1,\, i_2)$$

$$\Delta_2 u(i_1,\, i_2) = u(i_1,\, i_2+1) - u(i_1,\, i_2)$$

$$\Delta_{12} u(i_1,\, i_2) = u(i_1+1,\, i_2+1) - u(i_1+1,\, i_2) - u(i_1,\, i_2+1) + u(i_1,\, i_2)$$

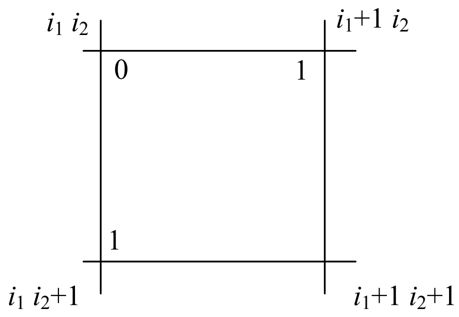

Рис. 1.4. Восполнение сеточной функции в двумерном случае.

Общая запись функции полилинейного восполнения в *N*-мерном случае формулируется следующим образом:

$$u(i,t)=\prod_{k=1}^{N}(1+t_k\Delta_k)u(i)$$
$$x_k\in[x_k(i),x_k(i_1+1)]\quad k=1,2,\ldots,N \tag{1.21}$$

<u>*Определение фундаментального решения*</u>.

Важным понятием, используемым для построения решения задачи, является фундаментальное решение. Если матрица-функция

$$\varepsilon(x)=\begin{bmatrix}\varepsilon_{11} & \cdots & \varepsilon_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_{n1} & \cdots & \varepsilon_{nn}\end{bmatrix}$$

удовлетворяет условию

$$L\varepsilon(x)=\delta(x)E, \tag{1.22}$$

где

$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ - единичная матрица; $\delta(x)$ - дельта-функция,

то такая функция называется фундаментальным решением векторного оператора *L*.

Решение уравнения $Lu=F$ с помощью фундаментального решения при любой заданной правой части F может быть получено в виде:

$$u=\varepsilon * F, \tag{1.23}$$

где

знак «*» означает операцию дискретной свертки.

С физической точки зрения фундаментальная функция – это решение для однородной бесконечной области при сосредоточенном воздействии, например, силы, теплового источника. С математической точки зрения фундаментальная функция является обратным оператором к *L*, а точнее ядром обратного оператора, следовательно, справедливо равенство:

$$L^{-1}=\varepsilon * \tag{1.24}$$

Данное свойство фундаментального решения создает основы при построении дискретных граничных уравнений.

Традиционная и операторная постановки граничных уравнений. Основные соотношения для оператора краевой задачи.

В основе традиционной постановки граничных уравнений лежит вторая формула Грина или формула Бетти в теории упругости. Она может быть записана в следующем виде:

$$\int_{\Omega}\left(uL^{*}v-vLu\right)d\xi=\int_{\Gamma}R(u,v)d\Gamma\,, \qquad (1.25)$$

где

R - билинейная форма относительно u, v и их производных. Причем следует отметить, что порядок производных должен быть не выше $k-1$, k - порядок исходного дифференциального оператора L.

Путем замены $v(\xi)$ на ядро интегрального оператора $G(x,\xi)$, Lu на F, а также с учетом

$$L_{\xi}^{*}G(x,\xi)=\delta(x-\xi)$$

и

$$\int_{\Omega}u(\xi)\delta(x-\xi)d\xi=u(x)$$

можно перейти к основному интегральному соотношению или тождеству Сомильяны в теории упругости.

Основное интегральное соотношение имеет вид:

$$u(x)=\int_{\Omega}G(x,\xi)F(\xi)d\xi+\int_{\Gamma}R(u,\xi)d\Gamma\,, \qquad x\in\Omega \qquad (1.26)$$

В билинейную форму R как слагаемые входят все виды краевых условий. Часть из них заменяется известными из постановки краевой задачи функциями.

В качестве фундаментального решения может выступать фундаментальная функция либо функция Грина.

При операторном походе важную роль играют основные соотношения, так как из них выводятся операторы краевых задач с согласованными весовыми характеристиками условий. При получении этих соотношений необходимо использовать дифференциальный самосопряженный оператор для эллиптической системы 2-го порядка. В матричной формулировке данный оператор можно представить по формуле:

$$L = D^* A D, \tag{1.27}$$

где
$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & A_{N2} & \dots & A_{NN} \end{bmatrix} = \left\{A_{ij}\right\}_{i,\, j=1,\, \dots\, ,\, N}$$

$$A_{ij} = \begin{bmatrix} a_{ij}^{11} & a_{ij}^{12} & \cdots & a_{ij}^{1M} \\ a_{ij}^{21} & a_{ij}^{22} & \dots & a_{ij}^{2M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{ij}^{M1} & a_{ij}^{M2} & \dots & a_{ij}^{MM} \end{bmatrix} = \left\{a_{ij}^{pq}\right\}_{p,\, q=1,\, \dots\, ,\, M}$$

$$D = \nabla \otimes E_M \quad \text{или} \quad D = \begin{bmatrix} \partial_1 E_M \\ \vdots \\ \partial_1 E_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \partial_1 \\ & \vdots & \\ \partial_N & & \\ & \ddots & \\ & & \partial_N \end{bmatrix}$$

$$D^* = \nabla^* \otimes E_M$$

или $$D^* = -\left(\partial_1 E_M, \dots, \partial_N E_M\right) = -\begin{bmatrix} \partial_1 & & & \partial_N & & \\ & \ddots & & \cdots & \ddots & \\ & & \partial_1 & & & \partial_N \end{bmatrix}$$

здесь

$$\nabla = \begin{bmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_N \end{bmatrix} = grad$$ - (градиент);

$\nabla^* = -(\partial_1, \dots, \partial_N) = -div$ - дивергенция;

$$E_M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ - единичная матрица размера *M*;

знак $\otimes$ означает прямое произведение матриц.

Подействовав дифференциальным оператором на произведение θu (u является произвольным), можно получить следующую зависимость

$$\begin{aligned} L\theta u = D^* A[\theta Du + (D\theta)u] = D^*\theta ADu + D^* A(D\theta)u = \\ = \theta D^* ADu + (D^*\theta)ADu + D^* A(D\theta)u \end{aligned} \tag{1.28}$$

где

$D\theta$ - производные от функции θ, причем:

$$D\theta = \delta_\Gamma v_E, \qquad D^*\theta = -\delta_\Gamma v_E^*, \qquad v_E = v \otimes E_M$$

здесь

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \end{bmatrix}$$

Для удобства записи основных соотношений вводятся оператор естественных граничных условий l:

$$l = -v_E^* AD \tag{1.29}$$

сопряженный ему оператор l^*:

$$l^* = -D^* Av_E \tag{1.30}$$

а также самосопряженный оператор второй краевой задачи L_0

$$L_0 = D^*\theta AD \tag{1.31}$$

Тогда, с учетом (2.29-2.31) можно сформулировать следующие основные соотношения:

$$L_0 u = \theta L u + \delta_\Gamma l u \tag{1.32}$$

$$L\theta u = L_0 u - l^*\left(\delta_\Gamma u\right) \tag{1.33}$$

$$L\theta u = \theta L u + \delta_\Gamma l u - l^*\left(\delta_\Gamma u\right) \tag{1.34}$$

Зависимость (1.34) можно переписать в виде:

$$L\theta u = \theta L u + Q u\,, \tag{1.35}$$

где Q - оператор, действующий на границе области, получаемый из L при дифференцировании характеристической функции области θ.

После получения основных соотношений традиционный вывод интегральных уравнений в терминах операторного подхода предполагает действие на основное соотношение обратным оператором L^{-1} с подстановкой известных функций из формулировки краевой задачи.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ И ОСНОВНЫЕ ПОСТАНОВКИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ.

Выделяют три основных типа задач, связанных с дифференциальными уравнениями. К первому типу относят задачу Коши. Для нее характерно отсутствие граничных условий, и она применима для уравнений гиперболического и параболического типов.

Второй тип – это краевая задача для уравнений эллиптического типа. Здесь, напротив, отсутствуют начальные условия, а задаются условия на границе. По типу граничных условий различают краевые задачи I, II и III рода. Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача I рода иначе называется задачей Дирихле. Вторая краевая задача называется задачей Неймана.

Смешанная краевая задача относится к третьему типу краевых задач и формулируется для уравнений гиперболического и параболических типов. В смешанной краевой задаче предусматривается задание и начальных, и граничных условий.

Постановка краевой задачи для уравнения Пуассона.

Краевой задачей с уравнением Пуассона описываются напряженное состояние при кручении стержня, температурное поле, прогиб мембраны. Кроме того, оператор Лапласа, являющийся оператором краевой задачи, входит составной частью в другие задачи, определяющие состояние конструкций при стационарных и нестационарных воздействиях. С математической точки зрения он является простейшим качественным аналогом других задач и эквивалентным оператором в итерационном процессе.

В обычной формулировке задача Неймана для уравнения Пуассона имеет вид:

$$\begin{cases} Lu = \nabla^2 u = F, \; x \in \Omega \\ lu = \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = f, \; x \in \Gamma \end{cases} \tag{2.1}$$

где $\nabla^2 = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ - оператор Лапласа;

$\frac{\partial}{\partial \nu}$ - производная по нормали к границе области $\Gamma = \partial\Omega$.

Исходную задачу можно записать единым уравнением в операторной постановке:

$$\sum_{j=1}^{N} \partial_j \theta \partial_j u = \theta F + \delta_\Gamma f \tag{2.2}$$

или

$$\mathsf{L} u = \mathsf{F} \tag{2.3}$$

Соответствующая ему трехмерная вариационная постановка:

$$\begin{aligned} \Phi(u) = \frac{1}{2} \iiint_\omega \theta \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 \right] dx_1 dx_2 dx_3 - \\ - \iiint_\omega \theta F u \, dx_1 dx_2 dx_3 - \int_{\partial\Omega} f u \, d\Gamma \end{aligned} \tag{2.4}$$

Если известно ядро интегрального оператора $G(x,\xi)$, т.е. существует обратный оператор L_ω^{-1} в какой либо окаймляющей области ω, то под действием данного обратного оператора на выражение (1.38) получим

$$\theta u + \int_{\partial\Omega} G'_\xi(x,\xi) u(\xi) d\Gamma_\xi = \tilde{\mathsf{F}}, \tag{2.5}$$

где

$$G'_\xi(x,\xi) = \frac{\partial}{\partial \nu_\xi} G(x,\xi); \; \tilde{\mathsf{F}} = \int_{\partial\Omega} G_\xi(x,\xi) \mathsf{F}(\xi) d\xi;$$

$$x = (x_1, x_2, x_3); \; \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

Классическое разрешающее уравнение относительно u_{Γ} может быть найдено, если положить на границе $\theta = \frac{1}{2}$.

Для задачи Дирихле $(u_{\Gamma} = g)$ операторная постановка также принимает вид (2.38). Запись в виде единственного уравнения приведена в (1.41):

$$\theta \nabla^2 u + \delta'_{\Gamma} u = \theta F + \delta'_{\Gamma} g \tag{2.6}$$

Вариационная постановка для данной задачи отсутствует. Если подействовать на уравнение обратным оператором в произвольной расширенной области и взять нормальную производную от промежуточного выражения вне границы, выражение примет вид:

$$\theta u' + \int_{\partial\Omega} G'_x(x,\xi) u'(\xi) d\Gamma_{\xi} = \int_{\partial\Omega} G'_x(x,\xi) \mathsf{F}(\xi) d\xi, \quad x \in \omega \tag{2.7}$$

Положив $\theta = \frac{1}{2}$, можно сформулировать разрешающее граничное уравнение относительно u_{Γ}, соответствующее прямому методу.

<u>Постановка задачи теории упругости</u>.

Традиционная постановка второй краевой задачи записывается в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} Lu = \sum_{j=1}^{N} \partial_j \sigma_{ij} = -F_i, \; x \in \Omega \\ Tu = \sum_{j=1}^{N} \nu_j \sigma_{ij} = -f_i, \; x \in \partial\Omega \end{cases} \quad i = 1, \dots, N \tag{2.8}$$

где Ω - область, соответствующая конструкции;

L - дифференциальный оператор, который задает условия внутри области Ω;

T - оператор, который задает дифференциальные условия на границе области;

σ_{ij} - соответствующая компонента тензора напряжений;

$\bar{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ - вектор координат точек;

$\bar{u} = [u_1, u_2, \dots, u_N]^T$ - вектор составляющих перемещений;

$\bar{v} = [v_1, v_2, \dots, v_N]^T$ - вектор составляющих нормали к поверхности;

$\bar{F} = [F_1, F_2, \dots, F_N]^T$ - вектор составляющих нагрузок, действующих внутри области;

$\bar{f} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T$ - вектор составляющих нагрузок, действующих на границе области.

Задаче (2.8) соответствует операторная постановка с использованием обобщенных функций:

$$\sum_{j=1}^{N} \partial_j \theta \sigma_{ij} + \theta F_i + \delta_\Gamma f_i = 0 \tag{2.9}$$

$$\theta L u + \delta_\Gamma T u + \mathsf{F} = 0 \tag{2.10}$$

где

$$\mathsf{F}_\mathsf{i} = \theta F_i + \delta_\Gamma f_i; \; \sigma_{ij} = \delta_{ij} \lambda \varepsilon + 2\mu \varepsilon_{ij}; \tag{2.11}$$

здесь

μ, λ - коэффициенты Ламе; δ_{ij} - символ Кронекера;

ε_{ij} - соответствующая компонента тензора деформаций, где

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\partial_i u_j + \partial_j u_i\right), \quad i = 1, 2, \dots, N; \quad j = 1, 2, \dots, N; \; \varepsilon = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_{ii} \tag{2.12}$$

В изотропной среде оператор второй краевой задачи относительно перемещений может быть представлен как:

$$\mathsf{L}_0 = \sum_{j=1}^{3} \partial_j^* \bar{\mu} \partial_j \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \partial_1^* \bar{\mu} \partial_1 & \partial_2^* \bar{\mu} \partial_1 & \partial_3^* \bar{\mu} \partial_1 \\ \partial_1^* \bar{\mu} \partial_2 & \partial_2^* \bar{\mu} \partial_2 & \partial_3^* \bar{\mu} \partial_2 \\ \partial_1^* \bar{\mu} \partial_3 & \partial_2^* \bar{\mu} \partial_3 & \partial_3^* \bar{\mu} \partial_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \partial_1^* \bar{\lambda} \partial_1 & \partial_1^* \bar{\lambda} \partial_2 & \partial_1^* \bar{\lambda} \partial_3 \\ \partial_2^* \bar{\lambda} \partial_1 & \partial_2^* \bar{\lambda} \partial_2 & \partial_2^* \bar{\lambda} \partial_3 \\ \partial_3^* \bar{\lambda} \partial_1 & \partial_3^* \bar{\lambda} \partial_2 & \partial_3^* \bar{\lambda} \partial_3 \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

где

$$\overline{\mu} = \theta\mu; \ \overline{\lambda} = \theta\lambda \tag{2.14}$$

$$\partial_i^* = -\frac{\partial}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, 3 \tag{2.15}$$

Тогда единое уравнение операторной установки с учетом (2.48) будет иметь вид (2.38) или

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\partial_j^*\overline{\mu}\partial_j u_i + \left(\partial_j^*\overline{\mu}\partial_i + \partial_i^*\overline{\lambda}\partial_j\right)u_j\right] = \theta F_i + \delta_\Gamma f_i \ , \ i = 1, 2, 3 \tag{2.16}$$

С помощью интегралов постановка задача теории упругости формулируется в виде функционала энергии:

$$\Phi(u) = \int_\omega \theta\left[\frac{1}{2}\sum_{i,j}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - \sum_i\left(F_i u_i\right)\right]dx - \int_{\partial\Omega}\sum_i f_i u_i d\Gamma \tag{2.17}$$

В векторной записи выражение (2.17) представляется как:

$$\Phi(u) = \int_\omega \theta\left[\frac{1}{2}(\sigma u, \varepsilon u) - (F, u)\right]dx - \int_{\partial\Omega}(f, u)d\Gamma, \tag{2.18}$$

где

σu - произведение матрицы напряжений σ на вектор перемещений u;

εu - произведение матрицы деформаций ε на вектор перемещений u.

Аналогично постановке краевой задачи для уравнения Пуассона, при действии обратным оператором с ядром $G(x,\xi)$ можно получить граничное уравнение, которое соответствует прямому методу:

$$\theta u = -\int_{\partial\Omega}\left(T_\xi G(x,\xi)\right)u(\xi)d\Gamma_\xi - \int_\omega G(x,\xi)F(\xi)d\xi \tag{2.19}$$

Для первой краевой задачи теории упругости при заданных перемещениях на границе области справедлива следующая зависимость:

$$\theta Lu - T^*\left(\delta_\Gamma(u - g)\right) + \theta F = 0, \tag{2.20}$$

где

знак T^* - оператор, сопряженный оператору краевых условий T. Тогда граничное уравнение принимает вид:

$$\theta u = \int_{\partial\Omega} G(x,\xi)(Tu)d\Gamma_\xi + \int_{\omega} G(x,\xi)F(\xi)d\xi - \int_{\partial\Omega} \left(T_\xi G(x,\xi)\right) g\, d\Gamma_\xi \quad (2.21)$$

3. ДИСКРЕТИЗАЦИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ.

Задача об изгибе балки.

Рассмотрим дифференциальное уравнение для балки с двумя коэффициентами постели k_1 и k_2:

$$EIy^{IV} - k_2 y^{II} + k_1 y = q(x), \tag{3.1}$$

где EI - изгибная жесткость; $q(x)$ – внешняя нагрузка.

Приведем уравнение (2.57) к более удобному виду:

$$y^{IV} - 2p^2 y^{II} + 4\alpha^4 y = f, \tag{3.2}$$

где

$$2p^2 = \frac{k_2}{EI}, \quad 4\alpha^4 = \frac{k_1}{EI}, \quad f = \frac{q_0}{EI}$$

Конечно-разностная аппроксимация уравнения (3.2) принимает вид:

$$\frac{1}{h^4} y_{i-2} - \left(\frac{4}{h^4} + \frac{2p^2}{h^2} \right) y_{i-1} + \left(\frac{6}{h^4} + \frac{4p^2}{h^2} + 4\alpha^4 \right) y_i - \left(\frac{4}{h^4} + \frac{2p^2}{h^2} \right) y_{i+1} + \frac{1}{h^4} y_{i+2} = f_i \tag{3.3}$$

Уравнение Пуассона.

Запишем уравнение Пуассона в следующем виде:

$$\nabla^2 u = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} \tag{3.4}$$

где

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Конечно-разностный аналог оператора Лапласа имеет вид:

$$\nabla^2 u = \sum_{k=1}^{N} D_k^2 = f(x), \tag{3.5}$$

где D_k^2 - разностные операторы вторых производных, причем

$$D_k^2\varphi(i)=\frac{\varphi(i_k-1)-2\varphi(i)+\varphi(i_k+1)}{h^2} \tag{3.6}$$

где h - шаг сетки; i - мультииндекс; i_k - k–я компонента мультииндекса.

<u>*Бигармоническое уравнение*</u>.

Бигармоническое уравнение приведено в формуле (3.7). К нему обычно сводят плоские задачи теории упругости, а также задачи расчета тонких пластин.

$$\nabla^4 u = f(x), \tag{3.7}$$

где

$\nabla^4 = \dfrac{\partial^4}{\partial x_1^4}+\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2}+\dfrac{\partial^4}{\partial x_2^4}$ - бигармонический оператор в двумерном случае.

При аппроксимации по методу конечных разностей получим

$$\nabla_h^4 = D_1^4 + 2D_1^2D_2^2 + D_2^4 \tag{3.8}$$

где

$$D_i^4 = D_i^2 D_i^2$$

<u>*Задача теории упругости*</u>.

Приведем общий вид дифференциального оператора задачи теории упругости в двумерной постановке:

$$L=\mu\nabla^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(\lambda+\mu)\begin{bmatrix}\partial_1^2 & \partial_1\partial_2\\ \partial_2\partial_1 & \partial_2^2\end{bmatrix} \tag{3.9}$$

Его вариационно-разностная аппроксимация представляется в виде:

$$L_h=\mu_h\nabla_h^2\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}+(\lambda_h+\mu_h)\begin{bmatrix}D_1^2 & D_1^0D_2^0\\ D_2^0D_1^0 & D_2^2\end{bmatrix} \tag{3.10}$$

где

$$\lambda_h=\lambda\cdot h_1\cdot h_2\ ,\ \mu_h=\mu\cdot h_1\cdot h_2$$

D_k^0 - оператор центральной разности вида

$$D_k^0\varphi(i)=\frac{\varphi(i_k+1)-\varphi(i_k-1)}{2h_k} \tag{3.11}$$

Аналогично запишем и для пространственного случая задачи теории упругости:

$$L=\mu\nabla^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+(\lambda+\mu)\begin{bmatrix}\partial_1^2&\partial_1\partial_2&\partial_1\partial_3\\\partial_2\partial_1&\partial_2^2&\partial_2\partial_3\\\partial_3\partial_1&\partial_3\partial_2&\partial_3^2\end{bmatrix} \tag{3.12}$$

$$L_h=\mu_h\nabla_h^2\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}+(\lambda_h+\mu_h)\begin{bmatrix}D_1^2&D_1^0D_2^0&D_1^0D_3^0\\D_2^0D_1^0&D_2^2&D_2^0D_3^0\\D_3^0D_1^0&D_3^0D_2^0&D_3^2\end{bmatrix} \tag{3.13}$$

здесь

$$\lambda_h=\lambda\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3\ ,\ \mu_h=\mu\cdot h_1\cdot h_2\cdot h_3$$

4. ПРЯМОЙ ПОДХОД В МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Обозначим L – разностный оператор краевой задачи трехмерной теории упругости с постоянными коэффициентами на всем пространстве, а L_0 – разностный оператор второй краевой задачи. Связь между двумя разностными операторами возможна через следующее соотношение:

$$\chi_0 L = \chi L_0, \tag{4.1}$$

где χ_0 – характеристическая функция внутренних узлов конструкции.

Так как разностные операторы являются самосопряженными, то справедливо равенство:

$$L\chi_0 = L_0\chi_0 \tag{4.2}$$

Характеристическая функция граничного множества узлов χ_Γ определяется как разность между характеристической функцией на всей области определения оператора $\mathcal{L}_0$ и характеристической функцией внутренних узлов. Под областью определения оператора второй краевой задачи понимается совокупность узлов сетки, где результат действия оператора $\mathcal{L}_0$ на произвольную сеточную функцию оказывается отличным от тождественного нуля.

$$\chi_\Gamma = \chi - \chi_0. \tag{4.3}$$

Граничный оператор Γ можно получить из дискретного аналога первой формулы Грина:

$$\chi_\Gamma \Gamma = L_0 - \chi_0 L. \tag{4.4}$$

Сопряженный граничный оператор, обозначаемый Γ^*, получается аналогичным образом:

$$\Gamma^* \chi_\Gamma = L_0^* - L\chi_0. \tag{4.5}$$

С учетом равенства $L_0 = L_0^*$ и объединения (4.4) и (4.5) получим основное соотношение, которое будем использовать при дальнейших вычислениях:

$$L\chi_0 = \chi_0 L + \chi_\Gamma \Gamma - \Gamma^* \chi_\Gamma . \tag{4.6}$$

Уравнение (4.6) можно записать в виде дискретного аналога второй формулы Грина для оператора L:

$$L\chi_0 u = \chi_0 Lu + \chi_\Gamma \Gamma u - \Gamma^* \chi_\Gamma u . \tag{4.7}$$

В общем случае несимметричный вариант дискретной смешанной краевой задачи формулируется в виде (4.8) как система трех уравнений, где составными частями являются: уравнение, характеризующее состояние внутри рассматриваемой области, естественные краевые условия или краевые условий второй краевой задачи, а также главные условия или краевые условия первой краевой задачи:

$$\begin{cases} \chi_0 Lu = \chi_0 F \\ æ_1 \Gamma u = æ_1 f \\ æ_2 u = æ_2 g \end{cases} , \tag{4.8}$$

где $æ_1$ – характеристическая функция естественных краевых условий; $æ_2$ – характеристическая функция главных краевых условий.

Характеристическая функция граничных узлов может быть определена как сумма характеристических функций естественных краевых условий и главных краевых условий:

$$æ_1 + æ_2 = \chi_\Gamma . \tag{4.9}$$

Также для характеристических функций справедливо:

$$æ_1 \cdot \chi_\Gamma = æ_1 , \;\; æ_2 \cdot \chi_\Gamma = æ_2 , \;\; æ_1 \cdot æ_2 = 0 . \tag{4.10}$$

Подставим (4.8) в (4.7). Тогда

$$L\chi_0 u = \chi_0 Lu + æ_1 \Gamma u + æ_2 \Gamma u - \Gamma^* æ_1 u - \Gamma^* æ_2 u \tag{4.11}$$

или

$$L\chi_0 u = \chi_0 F + æ_1 f + æ_2 \Gamma u - \Gamma^* æ_1 u - \Gamma^* æ_2 g . \tag{4.12}$$

Вводя новые обозначения и подействовав на уравнение обратным оператором L^{-1}, получим:

$$\widetilde{F} = \chi_0 F + æ_1 f - \mathit{\Gamma}^* æ_2 g$$

$$v = æ_2 \mathit{\Gamma} u$$

$$w_{\mathit{\Gamma}} = æ_1 u + æ_2 v$$

$$\chi_0 u = L^{-1}\widetilde{F} + L^{-1}(æ_2 - \mathit{\Gamma}^* æ_1)\, w_{\mathit{\Gamma}}. \qquad (4.13)$$

Умножив уравнение (4.13) на χ_Γ, получим граничную систему уравнений:

$$\chi_{\mathit{\Gamma}} L^{-1}(\mathit{\Gamma}^* æ_1 - æ_2)\, w_{\mathit{\Gamma}} = \chi_{\mathit{\Gamma}} L^{-1}\widetilde{F}, \qquad (4.14)$$

или в векторно-матричном виде:

$$A_{\mathit{\Gamma}} w_{\mathit{\Gamma}} = F_{\mathit{\Gamma}}, \qquad (4.15)$$

где
$$A_{\mathit{\Gamma}} = \chi_{\mathit{\Gamma}} L^{-1}(\mathit{\Gamma}^* æ_1 - æ_2)$$

– граничная матрица коэффициентов;

$$F_{\mathit{\Gamma}} = \chi_{\mathit{\Gamma}} L^{-1}\widetilde{F}$$

– правая часть граничной задачи.

После определения граничной дискретной функции $w_{\mathit{\Gamma}}$, находим решение краевой задачи (4.8) в виде формулы

$$u = L^{-1}[\widetilde{F} + (æ_2 - \mathit{\Gamma}^* æ_1)\, w_{\mathit{\Gamma}}] + æ_1 w_{\mathit{\Gamma}} + æ_2 g. \qquad (4.16)$$

В симметричном варианте (симметричной является граничная матрица) уравнение (4.16) подставляется в краевые условия исходной краевой задачи. Тогда

$$\begin{cases} æ_1 \mathit{\Gamma} L^{-1}[\widetilde{F} + (æ_2 - \Gamma æ_1) w_{\mathit{\Gamma}}] + æ_1 \mathit{\Gamma} æ_1 w_{\mathit{\Gamma}} + æ_1 \mathit{\Gamma} æ_2 g = æ_1 f \\ æ_2 L^{-1}[\widetilde{F} + (æ_2 - \Gamma^* æ_1) w_{\mathit{\Gamma}}] = 0. \end{cases} \qquad (4.17)$$

Единое граничное уравнение получается путем вычитания второго уравнения из первого:

$$\begin{aligned} æ_1 \mathit{\Gamma} æ_1 w_{\mathit{\Gamma}} - (æ_1 \mathit{\Gamma} - æ_2) L^{-1}(\mathit{\Gamma}^* æ_1 - æ_2)\, w_{\mathit{\Gamma}} = \\ = æ_1 (f - \mathit{\Gamma} æ_2 g) - (æ_1 \mathit{\Gamma} - æ_2) L^{-1}\widetilde{F}. \end{aligned} \qquad (4.18)$$

После определения $w_{\mathit{\Gamma}}$ решение исходной краевой задачи ищется по уравнению (4.16).

Вследствие разных возможностей, предоставляемых современной вычислительной техникой, может возникнуть необходимость в расчете отдельных частей конструкции с последующей их стыковкой. Рассмотрим один из возможных способов стыковки конструкций. Предположим, что перемещения при переходе через линию стыковки непрерывны. На рис. 4.1 приведена схема стыковки двух конструкций в разрезе.

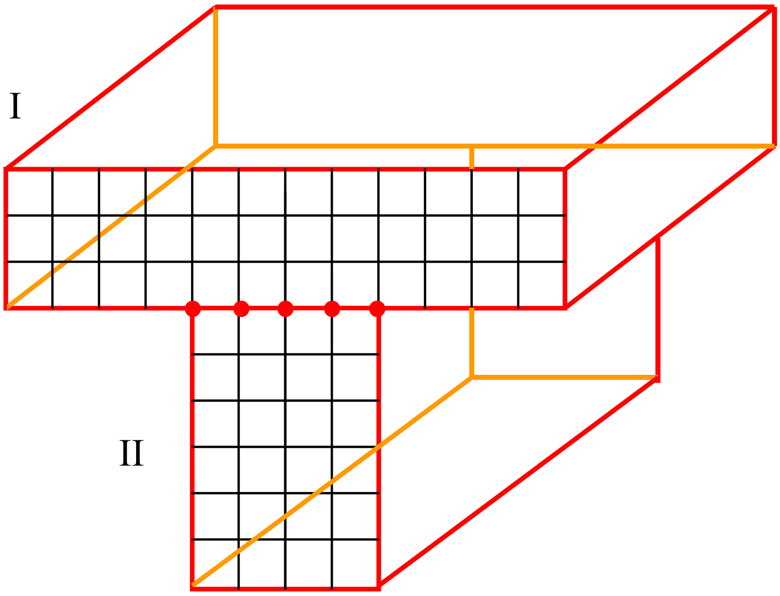

Рис. 4.1. Пример схемы стыковки двух конструкций в разрезе.

Исходя из системы граничных уравнений (4.14), получаем:

– для первой конструкции:

$$\chi_{\Gamma 1} L_1^{-1}(\Gamma_1^* æ_{11} - æ_{21}) w_{\Gamma 1} = \chi_{\Gamma 1} L_1^{-1} \widetilde{F}_1, \tag{4.19}$$

– для второй конструкции:

$$\chi_{\Gamma 2} L_2^{-1}(\Gamma_2^* æ_{12} - æ_{22})\, w_{\Gamma 2} = \chi_{\Gamma 2} L_2^{-1} \widetilde{F}_2, \tag{4.20}$$

где $æ_{11}$ – характеристическая функция естественных краевых условий для первой конструкции; $æ_{21}$ – характеристическая функция главных краевых условий для первой конструкции; $æ_{12}$ – характеристическая функция естественных краевых условий для второй конструкции; $æ_{22}$ –

характеристическая функция главных краевых условий для второй конструкции;

$$\widetilde{F}_1 = \chi_{01} F_1 + æ_{11} f_1 - \varGamma_1^* \ æ_{21} g \,;$$

$$\widetilde{F}_2 = \chi_{02} F_2 + æ_{12} f_2 - \varGamma_1^* \ æ_{22} g$$

Таким образом, решение задачи после предварительного выражения неизвестных $w_{\varGamma 1}$ и $w_{\varGamma 2}$ через g (их количество определяется числом общих узлов) сводится к решению небольшой системы уравнений:

$$æ_{21} \, w_{\varGamma 1} = æ_{22} \, w_{\varGamma 1}, \tag{4.21}$$

из которой определяются параметры g.

5. НЕПРЯМОЙ ПОДХОД В МЕТОДЕ ДИСКРЕТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ.

Дискретный аналог первой формулы Грина формулируется отдельно для внутренней и внешней областей.

– для внутренней области:

$$L_0^+ = \chi_0^+ L + \chi_\Gamma \Gamma_+ ; \tag{5.1}$$

$$L_0^+ = L\chi_0^+ + \Gamma_+^* \chi_\Gamma , \tag{5.2}$$

для внешней области:

$$L_0^- = \chi_0^- L + \chi_\Gamma \Gamma_- , \tag{5.3}$$

$$L_0^- = L\chi_0^- + \Gamma_-^* \chi_\Gamma , \tag{5.4}$$

Здесь L_0^+ – дискретный оператор для внутренней краевой задачи; L_0^- – дискретный оператор для внешней краевой задачи; χ_0^+ – характеристическая функция внутренних узлов конструкции исходной области; χ_0^- – характеристическая функция внутренних узлов конструкции области, дополняющей исходную область; Γ_+ – граничный оператор для исходной области; Γ_- – граничный оператор для дополнительной области; Γ_+^* – сопряженный граничный оператор для исходной области; Γ_-^* – сопряженный граничный оператор для дополнительной области.

Дискретный оператор L может быть представлен в виде суммы дискретных операторов для внутренней и внешней краевых задач. Отсюда следует:

$$L = (\chi_0^+ + \chi_0^-)L + \chi_\Gamma (\Gamma_+ - \Gamma_-) ; \tag{5.5}$$

$$L = L(\chi_0^+ + \chi_0^-) + (\Gamma_+^* - \Gamma_-^*)\chi_\Gamma . \tag{5.6}$$

Дискретный аналог второй формулы Грина здесь записывается как:

$$\begin{aligned} L\chi_0^+ u_+ &= \chi_0^+ L u_+ + \chi_\Gamma \Gamma_+ u_+ - \Gamma_+^* \chi_\Gamma u_+ , \\ L\chi_0^- u_- &= \chi_0^- L u_- + \chi_\Gamma \Gamma_- u_- - \Gamma_-^* \chi_\Gamma u_- , \end{aligned} \tag{5.7}$$

где u_+, u_- – дискретные функции, совпадающие во всех точках дискретного пространства, за исключением граничных узлов.

Выведем основное соотношение для непрямого подхода.

Скачок функции u, возникающий на граничном множестве узлов, определяется из формулы

$$\chi_\Gamma \Delta u_\Gamma = u_+ - u_- . \tag{5.8}$$

Общее уравнение, получаемое при сложении двух уравнений (5.7), принимает вид:

$$\begin{aligned} &L(\chi_0^+ u_+ + \chi_0^- u_-) = \\ &\quad = \chi_0^+ L u_+ + \chi_0^- L u_- + \chi_\Gamma (\Gamma_+ u_+ + \Gamma_- u_-) - \Gamma_+^* \chi_\Gamma u_+ - \Gamma_-^* \chi_\Gamma u_- . \end{aligned} \tag{5.9}$$

Пусть

$$v_+ = \Gamma_+ u_+ ; \quad v_- = \Gamma_- u_- ,$$

Тогда скачок в естественных краевых условиях Δv_Γ представляется по формуле

$$\chi_\Gamma \Delta v_\Gamma = \chi_\Gamma (v_+ + v_-) = \chi_\Gamma (\Gamma_+ u_+ + \Gamma_- u_-) . \tag{5.10}$$

Вводим слева и справа в уравнение (5.9) выражение $L\chi_\Gamma u_+$. С учетом (5.10) имеем следующую зависимость:

$$\begin{aligned} &L(\chi_0^+ u_+ + \chi_0^- u_- + \chi_\Gamma u_+) = \\ &\quad = \chi_0^+ L u_+ + \chi_0^- L u_- + L\chi_\Gamma u_+ + \chi_\Gamma \Delta v_\Gamma - \Gamma_+^* \chi_\Gamma u_+ - \Gamma_-^* \chi_\Gamma u_- . \end{aligned} \tag{5.11}$$

Выразив u_- из (5.8) и подставив в (5.11), получим:

$$\begin{aligned} &L(\chi_0^+ u_+ + \chi_0^- u_- + \chi_\Gamma u_+) = \\ &\quad = \chi_0^+ L u_+ + \chi_0^- L u_- + L\chi_\Gamma u_+ + \chi_\Gamma \Delta v_\Gamma - \Gamma_+^* \chi_\Gamma u_+ - \Gamma_-^* \chi_\Gamma (u_+ - \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma). \end{aligned} \tag{5.12}$$

Справедливы следующие соотношения:

$$\chi_\Gamma L = \chi_\Gamma (\Gamma_+ - \Gamma_-) , \tag{5.13}$$

$$L\chi_\Gamma = (\Gamma_+^* - \Gamma_-^*) \chi_\Gamma , \tag{5.14}$$

что легко показать, умножив на χ_Γ выражения (5.5) и (5.6).

Тогда с учетом (5.14) и возможных сокращений формула (5.12) приводится к виду:

$$\begin{aligned} &L(\chi_0^+ u_+ + \chi_0^- u_- + \chi_\Gamma u_+) = \\ &\quad = \chi_0^+ L u_+ + \chi_0^- L u_- + \chi_\Gamma \Delta v_\Gamma + L\chi_\Gamma \Delta u_\Gamma - \Gamma_+^* \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Характеристические функции связываются между собой формулой

$$\chi_0^+ + \chi_\Gamma + \chi_0^- = 1 . \tag{5.16}$$

Для данных характеристических функций имеют место равенства:

$$\chi_0^+ \cdot \chi_\Gamma = 0 , \quad \chi_0^- \cdot \chi_\Gamma = 0 , \quad \chi_0^+ \cdot \chi_0^- = 0 ,$$

из формулы (5.8) следует, что

$$\chi_0^+ u_- = \chi_0^+ u_+ ; \quad \chi_0^- u_- = \chi_0^- u_+ .$$

Следовательно,

$$\chi_0^+ u_+ + \chi_0^- u_- + \chi_\Gamma u_+ = (\chi_0^+ + \chi_0^- + \chi_\Gamma) u_+ = u_+ . \tag{5.17}$$

Действуя на левую и правую часть обратным оператором, получим искомую формулу основного соотношения:

$$u_+ = L^{-1}\chi_0^+ L u_+ + L^{-1}\chi_0^- L u_- + L^{-1}\chi_\Gamma \Delta v_\Gamma + \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma - L^{-1}\Gamma_+^* \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma . \tag{5.18}$$

Смешанная краевая задача для исходной внутренней области в непрямой формулировке представляется в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \chi_0^+ L u_+ = \chi_0^+ F \\ æ_1 \Gamma_+ u_+ = æ_1 f \\ æ_2 u_+ = æ_2 g. \end{cases} \tag{5.19}$$

Положим

$$\chi_0^- L u_- = 0 \text{ и } \Gamma = \Gamma_+ , \ \Gamma^* = \Gamma_+^* , \ \chi_0 = \chi_0^+ .$$

Тогда основное соотношение для непрямого подхода с учетом первого уравнения системы (5.19) будет иметь вид:

$$u_+ = L^{-1}\chi_0 F + L^{-1}\chi_\Gamma \Delta v_\Gamma + \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma - L^{-1}\Gamma^* \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma . \tag{5.20}$$

В зависимости от того, какие условия заданы для значений Δu_Γ и Δv_Γ, на границе области возможны различные варианты формулировок граничных уравнений.

Первый вариант.

Первый вариант возникает при условии, что $\chi_\Gamma \Delta u_\Gamma = 0$. Тогда, принимая во внимание (5.20), переходим к соотношению:

$$u_+ = L^{-1}\chi_0 F + L^{-1}\chi_\Gamma \Delta v_\Gamma . \tag{5.21}$$

При подстановке уравнения (5.21) в граничные условия (5.19) получим:

$$\begin{cases} æ_1 \Gamma L^{-1}\chi_0 F + æ_1 \Gamma L^{-1}\chi_\Gamma \Delta v_\Gamma = æ_1 f \\ æ_2 L^{-1}\chi_0 F + æ_2 L^{-1}\chi_\Gamma \Delta v_\Gamma = æ_2 g \end{cases} \tag{5.22}$$

После вычитания второго уравнения из первого и соответствующей перегруппировки дискретное граничное уравнение принимает вид:

$$\left(æ_1 \Gamma - æ_2\right) L^{-1}\chi_\Gamma \Delta v_\Gamma = æ_1 f + \left(æ_2 - æ_1 \Gamma\right) L^{-1}\chi_0 F - æ_2 g . \tag{5.23}$$

Второй вариант.

Пусть

$$\chi_\Gamma \Delta v_\Gamma = 0 .$$

Тогда имеет место уравнение:

$$u_+ = L^{-1}\chi_0 F + \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma - L^{-1}\Gamma^* \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma . \tag{5.24}$$

Следуя схеме, предложенной для первого варианта, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} æ_1 \Gamma L^{-1}\chi_0 F + æ_1 \Gamma \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma - æ_1 \Gamma L^{-1}\Gamma^* \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma = æ_1 f \\ æ_2 L^{-1}\chi_0 F + æ_2 \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma - æ_2 L^{-1}\Gamma^* \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma = æ_2 g. \end{cases} \tag{5.25}$$

Дискретное граничное уравнение:

$$\begin{aligned} (æ_1 \Gamma - æ_2)\chi_\Gamma \Delta u_\Gamma + (æ_2 - æ_1 \Gamma) L^{-1}\Gamma^* \chi_\Gamma \Delta u_\Gamma = \\ = æ_1 f + (æ_2 - æ_1 \Gamma) L^{-1}\chi_0 F - æ_2 g. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Следующий вариант возникает, если ввести следующие дополнительные условия:

$$æ_1 \Delta u_\Gamma = 0; \quad æ_2 \Delta v_\Gamma = 0 .$$

Равенство (5.18) сводится к зависимости:

$$u_+ = L^{-1}\chi_0 F + L^{-1}(æ_1 - \Gamma^* æ_2)\Delta z_\Gamma + æ_2 \Delta z_\Gamma , \tag{5.27}$$

где $$æ_1 \Delta z_\Gamma = æ_1 \Delta v_\Gamma , \quad æ_2 \Delta z_\Gamma = æ_2 \Delta u_\Gamma$$

$$\begin{cases} æ_1 \Gamma L^{-1} \chi_0 F + æ_1 \Gamma L^{-1} (æ_1 - \Gamma^* æ_2) \Delta z_\Gamma + æ_1 \Gamma æ_2 \Delta z_\Gamma = æ_1 f \\ æ_2 L^{-1} \chi_0 F + æ_2 L^{-1} (æ_1 - \Gamma^* æ_2) \Delta z_\Gamma + æ_2 \Delta z_\Gamma = æ_2 g. \end{cases} \tag{5.28}$$

Дискретное граничное уравнение имеет вид:

$$\begin{gathered} æ_1 \Gamma æ_2 \Delta z_\Gamma + (æ_1 \Gamma - æ_2) L^{-1} (æ_1 - \Gamma^* æ_2) \Delta z_\Gamma - æ_2 \Delta z_\Gamma = \\ = æ_1 f + (æ_2 - æ_1 \Gamma) L^{-1} \chi_0 F - æ_2 g. \end{gathered} \tag{5.29}$$

При симметричном варианте вводятся следующие условия:

$$æ_1 \Delta v_\Gamma = 0, \qquad æ_2 \Delta u_\Gamma = 0.$$

Тогда уравнение (5.18) записывается в виде:

$$u_+ = L^{-1} \chi_0 F + L^{-1} (æ_2 - \Gamma^* æ_1) \Delta w_\Gamma + æ_1 \Delta w_\Gamma, \tag{5.30}$$

где $$æ_1 \Delta w_\Gamma = æ_1 \Delta u_\Gamma, \quad æ_2 \Delta w_\Gamma = æ_2 \Delta v_\Gamma.$$

Система уравнений граничных уравнений относительно Δw_Γ после подстановки u_+ в граничные условия примет вид:

$$\begin{cases} æ_1 \Gamma L^{-1} \chi_0 F + æ_1 \Gamma L^{-1} (æ_2 - \Gamma^* æ_1) \Delta w_\Gamma + æ_1 \Gamma æ_1 \Delta w_\Gamma = æ_1 f \\ æ_2 L^{-1} \chi_0 F + æ_2 L^{-1} (æ_2 - \Gamma^* æ_1) \Delta w_\Gamma = æ_2 g. \end{cases} \tag{5.31}$$

Окончательный вид дискретных граничных уравнений приведен ниже:

$$\begin{gathered} æ_1 \Gamma æ_1 \Delta w_\Gamma + (æ_1 \Gamma - æ_2) L^{-1} (æ_2 - \Gamma^* æ_1) \Delta w_\Gamma = \\ = æ_1 f + (æ_2 - æ_1 \Gamma) L^{-1} \chi_0 F - æ_2 g. \end{gathered} \tag{5.32}$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных задачах. М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. *Варданян Г.С., Андреев В.И., Атаров Н.М., Горшков А.А.* Сопротивление материалов с основами теории упругости и пластичности. – М.: АСВ, 1995. – 572 с.
3. *Владимиров В.С.* Обобщенные функции в математической физике. – М.: Наука, 1979. – 320 с.
4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Обобщенные функции и действия над ними. Том 1. – М.: Добросвет, 2007. – 408 с.
5. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. – М.: КомКнига, 2006. – 376 с.
6. *Золотов А.Б.* Постановка и алгоритмы численного решения краевых задач строительной механики методом стандартной области. Дис. на соиск. уч. степ. д-ра техн. наук: 05.23.17. МГСУ. М.: 1989.
7. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Некоторые аналитико-численные методы решения краевых задач строительной механики: Монография – М.: Издательство АСВ, 2004. – 200 с.
8. *Золотов А.Б., Акимов П.А.* Практические методы расчета строительных конструкций. Численно-аналитические методы: Монография – М.: Издательство АСВ, 2006. – 208 с.
9. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Математические методы в строительной механике (с основами теории обобщенных функций). – М.: Издательство АСВ, 2008. – 336 с.
10. *Золотов А.Б., Акимов П.А., Сидоров В.Н., Мозгалева М.Л.* Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций. – М.: Издательство АСВ, 2009. – 336 с.

11. *Золотов А.Б., Ларионов А.В., Мозгалева М.Л., Мсхалая Ж.И.* Постановка и аппроксимация краевых задач методом расширенной области. М.: МИСИ, 1992. – 86 с.
12. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
13. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с.
14. *Розин Л.А.* Задачи теории упругости и численные методы их решения. – СПб.: Издательство СПбГТУ, 1998. – 532 с.
15. *Сидоров В.Н.* Лекции по сопротивлению материалов и теории упругости. М.: РИЦ Генштаба ВС РФ, 2002. – 352 с.
16. *Сидоров В.Н., Ахметов В.К.* Математическое моделирование в строительстве. – М.: Издательство АСВ, 2007. – 336 с.
17. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576 с.